Leçon 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications

Références : Mansuy, Beck, Rombaldi, Gourdon, Allaire

DEV 1 : Décomposition de Dunford

DEV 2 : LU et Cholesky

Leçon 154 : Exemples de décompositions de matrices. Applications

On considère K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ canoniquement associé, χ_A (ou χ_u) son polynôme caractéristique.

I - Réduction d'une matrice

1) Outils pour la réduction [MAN]

[MAN] **DEF 1** : On dispose du morphisme d'algèbres $\varphi : K[X] \longrightarrow \mathcal{M}_n(K)$, $P \longmapsto P(A)$ de noyau $\ker(\varphi) = (\pi_A)$. π_A est appelé polynôme minimal de A.

[MAN] **PROP 2** : $\mathrm{Im}(\varphi) = K[A]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(K)$.

[MAN] **LEMME 3** : (noyaux) Soit $(P_i)_{i \in [\![1;N]\!]}$ une famille de polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors :

$$\ker(P_1 \cdots P_N(A)) = \bigoplus_{i=1} \ker(P_i(A))$$

REM 4 : Avec le théorème de Cayley-Hamilton, si χ_A est scindé, on trouve ainsi une décomposition de $\mathcal{M}_n(K)$ en sous-espaces stables par A.

2) Diagonalisation et trigonalisation [MAN] [GRi]

DEF 5 : La matrice A est dite diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

EX 6 : Les homothéties sont diagonalisables

THM 7 : Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. A est diagonalisable
2. Il existe une base B de E formée de vecteurs propres de u
3. $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_K(A)} \ker(A - \lambda I_n)$ et χ_A est scindé dans K.
4. χ_A est scindé et la dimension de chaque sous-espace propre de u est égale à la multiplicité de la valeur propre.
5. Il existe $P \in K[X]$ scindé à racines simples dans K tel que $P(A) = 0$
6. Le polynôme minimal π_A de A est scindé à racines simples.

COR 8 : Si χ_A est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable.

COR 9 : Si F est stable par u, alors $u_{|F}$ est diagonalisable

EX 10 : Les projecteurs et les symétries sont diagonalisables

DEF 11 : On dit que A est trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

THM 12 : A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé dans K.

COR 13 : Si $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, alors $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$

PROP 14 : Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, alors A et B sont diagonalisables (resp. trigonalisables) dans une même base si et seulement si $AB = BA$ et A et B sont diagonalisables (resp. trigonalisables).

APPLI 15 : Si A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$, $P \in GL_n(K)$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $A^k = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

APPLI 16 : Les suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ telles que $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$ sont $\begin{cases} u_n = 5 \times 2^n - 3 \times 3^n \\ v_n = -5 \times 2^n + 6 \times 3^n \end{cases}$

APPLI 17 : On peut résoudre un système différentiel linéaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

3) Décomposition de Dunford [GOU]

DEV 1

PROP 18 : Soit $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de A, $P = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ sa décomposition en facteurs irréductibles. Pour tout i, on note $N_i = \ker(M_i^{\alpha_i}(A))$. On a alors :

$E = \bigoplus_{i=1} N_i$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en A.

THM 19 : On suppose χ_A scindé sur K. Il existe un unique couple (D, N) de matrices tels que :
- $A = D + N$ et $DN = ND$
- D est diagonalisable, N est nilpotente

De plus, D et N sont des polynômes en A.

EX 20 : La décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ car ces matrices ne commutent pas !

APPLI 21 : La décomposition de Dunford facilite le calcul d'exponentielle de matrices avec $e^A = e^D e^N$.

II - Invariants de similitude

1) Décomposition de Jordan [MAN] [BEC]

DEF 22 : On appelle bloc de Jordan de taille $m \in \mathbb{N}^*$, noté J_m, la matrice de $\mathcal{M}_m(K)$ dont les coefficients sont nuls sauf ceux en position $(i, i+1)$, $i \in [\![1; m-1]\!]$, qui valent 1.

REM 23 : On a que J_m est nilpotente d'ordre m

PROP 24 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ nilpotente tel qu'il existe des entiers $d_1 = \deg(\pi_A) \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ telle que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs $J_{d_1}, \dots, J_{d_r}$. Alors :
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\#\{j \in [\![1; r]\!] / d_j = k\} = 2\dim(\ker(A^k)) - \dim(\ker(A^{k-1})) - \dim(\ker(A^{k+1}))$

LEMME 25 : Soit A nilpotente, $\mathrm{nil}(A) = r$, alors il existe $F_1, \dots, F_r$ tels que :
- $\forall k \in [\![1; r]\!]$, $\ker(A^k) = \ker(A^{k-1}) \oplus F_k$
- $\forall k \in [\![2; r]\!]$, $A(F_k) \subset F_{k-1}$

THM 26 : Soit A nilpotente. Alors, il existe des entiers $d_1 = \deg(\pi_A) \geq d_2 \geq \dots \geq d_r$ tels que A soit semblable à $\begin{pmatrix} J_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{d_r} \end{pmatrix}$. Cette matrice est la réduite de Jordan de A.

REM 27 : On a ainsi établi l'existence (THM 26) et l'unicité (PROP 24) de la décomposition de Jordan d'une matrice nilpotente.

THM 28 : On suppose que χ_A est scindé, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les valeurs propres distinctes de A. Alors, pour tout $j \in [\![1; m]\!]$ il existe une suite $d_{j,1} \geq \dots \geq d_{j,r_j}$ telle que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec les blocs $\lambda_1 I_{d_{1,1}} + J_{d_{1,1}}, \dots, \lambda_1 I_{d_{1,r_1}} + J_{d_{1,r_1}}, \dots, \lambda_m I_{d_{m,1}} + J_{d_{m,1}}, \dots, \lambda_m I_{d_{m,r_m}} + J_{d_{m,r_m}}$
Cette matrice est la réduite de Jordan de A.

PROP 29 : Deux matrices (avec χ scindé) sont semblables si et seulement si elles ont la même réduction de Jordan

EX 30 : Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes d'indice 2 mais pas semblables.

2) Décomposition de Frobenius [MAN]

DEF 31 : On appelle polynôme minimal local de $u \in \mathcal{L}(E)$ en $x \in E$ l'unique polynôme unitaire $\pi_{u,x}$ tel que $\pi_{u,x}$ engendre l'idéal $\{P \in K[X] / P(u)(x) = 0\}$.

DEF 32 : On appelle sous-espace cyclique de u en $x \in E$ le plus petit sous-espace de E stable par u contenant x.

PROP 33 : $E_{u,x} = \mathrm{Vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ où $p = \deg(\pi_{u,x})$.

DEF 34 : u est dit cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $E = E_{u,x}$.

EX 35 : Si $\dim(E) = 2$, $u \in \mathcal{L}(E)$ est soit une homothétie, soit cyclique.

PROP 36 : $\exists x \in E$, $\pi_u = \pi_{u,x}$.

LEMME 37 : Si $\pi_u = \pi_{u,x}$, alors $E_{u,x}$ admet un supplémentaire stable par u.

THM 38 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Il existe une unique suite de polynômes unitaires $P_1, \dots, P_r$ tels que :
- $\forall i \in [\![1; r]\!]$, $P_{i+1} | P_i$
- A est semblable à $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ où C_{P_i} est la matrice compagnon de P_i

Cette matrice est la réduite de Frobenius de A.

DEF 39 : Les polynômes $P_1, \dots, P_r$ sont les invariants de similitude de A.

REM 40 : $\pi_A = P_r$ et $\chi_A = P_1 \cdots P_r$.

COR 41 : Deux matrices sont semblables si et seulement si ils ont les mêmes invariants de similitude.

III - Systèmes linéaires et calcul numérique

1) Décomposition LU et de Cholesky

DEF 42 : En notant $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$, on appelle sous-matrices principales de A les $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$, $k \in [\![1; n]\!]$ et les déterminants principaux sont les $\Delta_k = \det(A_k)$.

THM 43 : A admet une décomposition $A = LU$, où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une matrice triangulaire supérieure si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Lorsqu'elle existe, une telle décomposition est unique.

THM 44 (Cholesky) : A est symétrique réelle définie positive si et seulement si il existe une matrice B triangulaire inférieure et inversible telle que $A = B^tB$. De plus, une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B.

2) Méthodes itératives [ALL]

DEF 45 : Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On introduit un couple de matrices (M,N) avec M inversible tel que $A = M - N$ appelé "splitting". La méthode itérative basée sur le splitting est :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ Mx_{k+1} = Nx_k + b \end{cases} \quad (*)$$

REM 46 : Si (x_k) converge vers x, alors x est solution du système. On obtient alors une méthode de résolution approchée de système en choisissant une erreur ε telle que $\|b - Ax_k\| < \varepsilon$. (condition d'erreur)

DEF 47 : On dit qu'une méthode itérative converge lorsque pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite des solutions approchées (x_k) converge vers x.

LEMME 48 : La méthode itérative $(*)$ converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$ où $\rho(A) = \max_{\lambda \in Sp(A)} |\lambda|$

DEF 49 : Les méthodes itératives portent un nom selon la nature de M et N :

Nom	M	N
Jacobi	D	$D-A$
Gauss-Seidel	$D-E$	F
Relaxation	$\frac{D}{\omega} - E$	$\frac{1-\omega}{\omega}D + F$
Gradient	$\frac{1}{\alpha}Id$	$\frac{1}{\alpha}Id - A$

$D = diag(a_{i,i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ si $A = (a_{i,j})$

si $A = D - E - F$ si $A = \begin{pmatrix} D & -F \\ -E & \end{pmatrix}$

LEMME 50 : Si A est hermitienne définie positive, $A = M - N$ avec M inversible. Alors la matrice $M^* + N$ est hermitienne. De plus, si $M^* + N$ est aussi définie positive, alors $\rho(M^{-1}N) < 1$ et donc la méthode $(*)$ converge.

IV - Décomposition dans $GL_n(K)$

1) Générateurs de $GL_n(K)$ [Rot]

DEF 51 : On appelle matrice de transvection une matrice de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$

DEF 52 : On appelle matrice de dilatation toute matrice de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, $1 \leq i \leq n$

REM 53 : Ces matrices sont utilisées

THM 54 : Toute matrice $A \in GL_n(K)$ s'écrit $A = \prod_{k=1}^{r} P_k D_n(\lambda) \prod_{j=1}^{s} Q_j$ où $\lambda = \det(A)$, $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s$ sont des matrices de transvection.

COR 55 : Les groupes $SL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

COR 56 : Les ensembles $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs et ce sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$.

2) Théorème spectral et application [Rot] On suppose E euclidien

LEMME 57 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

LEMME 58 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique et F est un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

THM 59 : Soit A une matrice symétrique réelle. $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $A = PD^tP$ avec D diagonale.

THM 60 (Décomposition polaire) : La multiplication matricielle induit des homéomorphismes :

(i) $\mu : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $(O, S) \longmapsto OS$

(ii) $\mu : \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, $(U, H) \longmapsto UH$

THM 61 : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme